

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЮ ГУРВИЦА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЮ МИХАЙЛОВА**

Методические указания  
к выполнению практических работ  
для студентов направления  
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение  
машиностроительных производств»  
очной и заочной форм обучения

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ

Под *устойчивостью* системы понимается способность ее возвращаться к состоянию установившегося равновесия после снятия возмущения, нарушившего это равновесие. *Неустойчивая система* непрерывно удаляется от равновесного состояния или совершает вокруг него колебания с возрастающей амплитудой.



Рис. 1. Зависимость устойчивости от структуры системы

Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы (рис.1). Говорят, что *система устойчива «в малом»*, если определен факт наличия устойчивости, но не определены ее границы. *Система устойчива «в большом»*, когда определены границы устойчивости и реальные отклонения параметров системы не выходят за эти границы.

В соответствии с классическим методом решение дифференциального уравнения запишется в виде:

$$y(t) = y_{\text{вын}}(t) + y_{\text{св}}(t).$$

Здесь  $y_{\text{св}}(t)$  — *общее решение однородного дифференциального уравнения*, то есть уравнения с нулевой правой частью:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)} y' + a_{(n)} y = 0.$$

Физически это означает, что все внешние воздействия сняты и система абсолютно свободна, ее движения определяются лишь собственной структурой, поэтому решение данного уравнения называется *свободной составляющей общего решения*.  $y_{\text{вын}}(t)$  — *частное решение неоднородного*

дифференциального уравнения, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено внешнее воздействие  $u(t)$ , поэтому вторая составляющая общего решения называется *вынужденной*. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы после окончания переходного процесса.

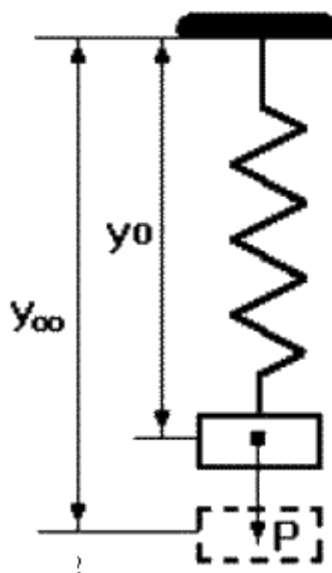


Рис. 2. К определению колебаний систем управления

Можно провести аналогию между САУ и пружиной, колебания которой описываются аналогичным дифференциальным уравнением (рис. 2). Оттянем пружину, а затем отпустим, предоставив ее самой себе. Пружина будет колебаться в соответствии со свободной составляющей решения уравнения, то есть характер колебаний будет определяться только структурой самой пружины. Если в момент времени  $t = 0$  подвесить к пружине груз, на свободные колебания наложится внешняя сила  $P$ . После затухания колебаний, описываемых только свободной составляющей общего решения, система перейдет в новый установившийся режим, характеризуемый вынужденной составляющей  $y_{\text{вын}} = y(t \rightarrow \infty)$ . Если внешнее воздействие само будет изменяться по синусоидальному закону  $P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , то после затухания переходного процесса система будет совершать вынужденные колебания с той же частотой, что и вынуждающая сила, то есть  $y_{\text{вын}} = y_{\text{max}} \sin(\omega t + y)$ .

Каждая составляющая общего решения уравнения динамики ищется отдельно. Вынужденная составляющая ищется на основе решения уравнения статики для данной системы для времени  $t \rightarrow \infty$ . Свободная составляющая представляет собой сумму из  $n$  отдельных составляющих:

$$y_{cb}(t) = \sum_{i=1}^n A_i p^{-p_i t},$$

где  $p_i$  — корни характеристического уравнения  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0$ . Корни могут быть либо вещественными, либо попарно комплексно сопряженными. Постоянные интегрирования  $A_i$  определяют из начальных и конечных условий, подставляя в общее решение значения  $u, y$  и их производные в моменты времени  $t = 0$  и  $t \rightarrow \infty$ .

Каждому отрицательному вещественному корню соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая  $y_{cb}(t)_i$ , каждому положительному — экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует  $y_{cb}(t)_i = \text{const}$  (рис. 3).

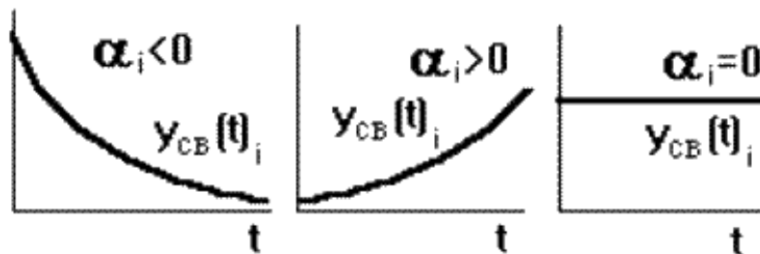


Рис. 3. К определению составляющих общего уравнения динамики согласно величине корней характеристического уравнения

Если пара комплексных корней имеет отрицательную вещественную часть, в системе возникают затухающие колебания с частотой  $\omega_i$ . В случае наличия в корнях положительной вещественной части возникают расходящиеся колебания. Нулевая вещественная часть предполагает появление незатухающих колебаний постоянной амплитуды (рис. 4).

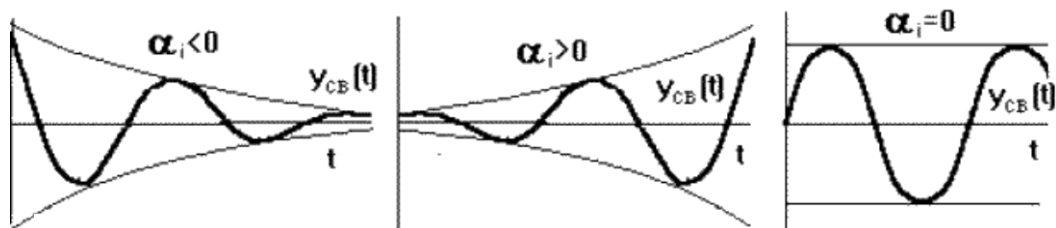


Рис. 4. Определение типа колебаний при наличии комплексно сопряженных корней.

Так как после снятия возмущения  $y_{\text{вын}}(t) = 0$ , устойчивость системы определяется только характером свободной составляющей  $y_{\text{св}}(t)$ . Поэтому *условие устойчивости систем по Ляпунову* формулируется так: в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, записанного в отклонениях, должна стремиться к нулю, то есть затухать.

Исходя из расположения на комплексной плоскости, корни с отрицательными вещественными частями называются *левыми*, с положительными — *правыми* (рис. 5).

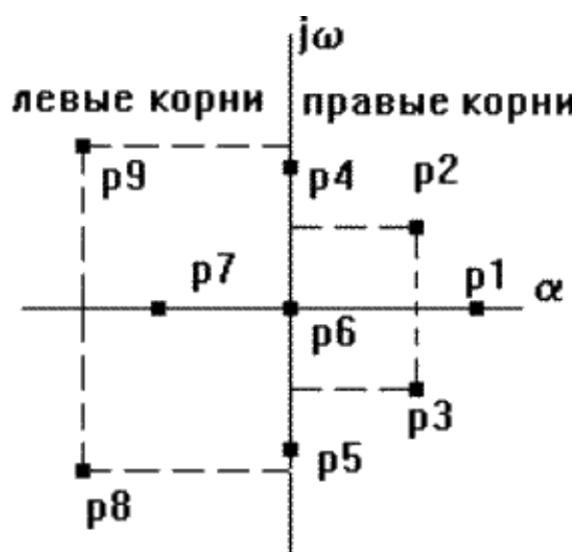


Рис. 5. К определению положения корней

Условие устойчивости линейной САУ можно сформулировать следующим образом: чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми. Если хотя бы один корень правый, система неустойчива. Если один из корней равен нулю (в системах, где  $a_n = 0$ ), а остальные — левые, система находится на *границе апериодической устойчивости*. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно сопряженных корней, система находится на *границе колебательной устойчивости*.

Правила, позволяющие судить о знаках корней характеристического уравнения без его решения, называются *критериями устойчивости*. Их можно разделить на *алгебраические* (основаны на составлении алгебраических выражений, по которым можно судить об устойчивости САУ) и *частотные* (основаны на исследовании частотных характеристик).

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Характеристическое уравнение системы с помощью теоремы Виета может быть записано в виде:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n) = 0,$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни этого уравнения. Если система устойчива, все корни левые, то есть вещественные части всех корней отрицательны, что можно записать как  $a_i = -|a_i| < 0$ . Подставим их в уравнение:

$$a_0 (p + |a_1|) (p + |a_2| - j\omega^2) (p + |a_2| + j\omega^2) \dots = 0.$$

Перемножая комплексно сопряженные выражения, получим:

$$a_0 (p + |a_1|) ((p + |a_2|)^2 + (\omega^2)^2) \dots = 0.$$

После раскрытия скобок должно получиться выражение:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Так как в скобках нет ни одного отрицательного числа, то ни один из коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  не будет отрицательным. Поэтому *необходимым условием устойчивости САУ* является положительность коэффициентов характеристического уравнения:  $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ . В дальнейшем будем рассматривать только уравнения, где  $a_n > 0$ . В противном случае уравнение домножается на -1.

Рассмотренное условие является необходимым, но не достаточным условием. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем можно определить с помощью алгебраических критериев Рауса и Гурвица.

## КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА

Гурвиц предложил свой критерий устойчивости. Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица  $\Delta$  по алгоритму:

1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$ ;

2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше  $n$  ставятся нули.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

*Критерий Гурвица:* для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все  $n$  диагональных миноров определителя Гурвица были положительны. Эти миноры называются *определителями Гурвица*.

Рассмотрим примеры применения критерия Гурвица:

1)  $n = 1 \Rightarrow$  уравнение динамики:  $a_0 p + a_1 = 0$ . Определитель Гурвица:  $\Delta = \Delta_1 = a_1 > 0$  при  $a_0 > 0$ , то есть условие устойчивости:  $a_0 > 0, a_1 > 0$ ;

2)  $n = 2 \Rightarrow$  уравнение динамики:  $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$ . Определители Гурвица:  $\Delta_1 = a_1 > 0, D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = a_1 a_2 > 0$ , так как  $a_3 = 0$ , то есть условие устойчивости:  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ ;

3)  $n = 3 \Rightarrow$  уравнение динамики:  $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ . Определители Гурвица:  $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0$ , условие устойчивости:  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

Таким образом, при  $n \leq 2$  положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым и достаточным условием устойчивости САУ. При  $n > 2$  появляются дополнительные условия.

Критерий Гурвица применяют при  $n \leq 4$ . При больших порядках возрастает число определителей и процесс становится трудоемким.

Недостатком критерия Гурвица является малая наглядность, а достоинством — удобство для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния одного из параметров САУ на ее устойчивость. Так, равенство нулю главного определителя  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$  говорит о том, что система находится на границе устойчивости. При этом либо  $a_n = 0$ , либо предпоследний минор  $\Delta_{n-1} = 0$ . Параметры САУ определяют значения коэффициентов уравнения динамики, следовательно, изменение любого параметра  $K_i$  влияет на значение определителя  $\Delta_{n-1}$ . Исследуя это влияние, можно найти, при каком значении  $K_i$  определитель  $\Delta_{n-1}$  станет равен нулю, а потом — отрицательным (рис. 6). Это и будет предельное значение исследуемого параметра, после которого система становится неустойчивой.

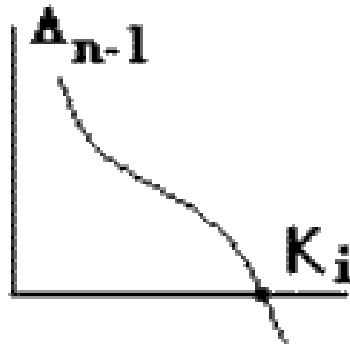


Рис. 6. О влиянии параметров системы на устойчивость

## ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Под частотными критериями устойчивости понимают графоаналитические методы, позволяющие по виду частотных характеристик САУ судить об их устойчивости. *Их общее достоинство* — в простой геометрической интерпретации, наглядности и отсутствии ограничений на порядок дифференциального уравнения.

### ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

Запишем характеристический полином САУ в виде

$$D(p) = a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n) = 0.$$

Его корни

$$p_i = \alpha_i + j\omega_i = |p_i| e^{j \arg(p_i)},$$

где

$$\arg(p_i) = \arctg(\omega_i/\alpha_i) + k\pi,$$

$$|p_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2}.$$

Каждый корень можно изобразить вектором на комплексной плоскости (рис. 7а), тогда разность  $p - p_i$  изобразится разностью векторов (рис. 7б), где  $p$  - любое число.

Если менять значение  $p$  произвольным образом, то конец вектора  $p - p_i$  будет перемещаться по комплексной плоскости, а его начало будет оставаться неподвижным, так как  $p_i$  — это конкретное неизменное значение.

В частном случае, если на вход системы подавать гармонические колебания с различной частотой  $\omega$ , то  $p = j\omega$ , а характеристический полином принимает вид:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

При этом концы векторов  $j\omega - p_i$  будут находиться на мнимой оси (рис. 7в). Если менять  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то каждый вектор  $j\omega - p_i$  будет поворачиваться относительно своего начала  $p_i$  на угол  $+\pi$  для левых и  $-\pi$  для правых корней (рис. 7г).

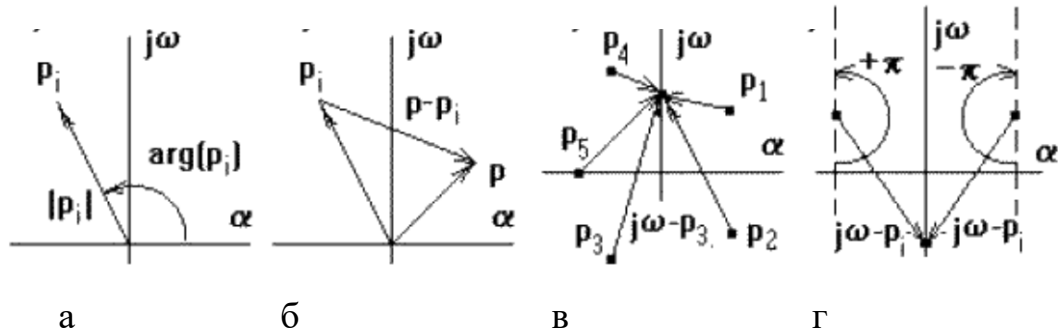


Рис. 7. Изображение корней на комплексной плоскости

Характеристический полином можно представить в виде:

$$D(j\omega) = |D(j\omega)|e^{j\arg(D(j\omega))},$$

где  $|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - p_1| \cdot |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|,$   
 $\arg(D(j\omega)) = \arg(j\omega - p_1) + \arg(j\omega - p_2) + \dots + \arg(j\omega - p_n).$

Пусть из  $n$  корней  $m$  — правые, а  $n - m$  — левые, тогда угол поворота вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  равен:

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n - m)\pi - m\pi,$$

или при изменении  $\omega$  от  $0$  до  $+\infty$  получаем:

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (n - 2m) \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда вытекает правило: изменение аргумента вектора  $b$  при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  равно разности между числом левых и правых корней уравнения  $D(p) = 0$ , умноженному на  $\pi$ , а при изменении частоты  $\omega$  от  $0$  до  $+\infty$  эта разность умножается на  $\pi/2$ .

Полученное правило и есть *принцип аргумента*. Он положен в основу всех частотных критериев устойчивости.

## КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Так как для устойчивой САУ число правых корней  $m = 0$ , угол поворота вектора  $D(j\omega)$  составит:

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = n \frac{\pi}{2}.$$

То есть САУ будет устойчива, если вектор  $D(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  повернется на угол  $n \frac{\pi}{2}$ .

При этом конец вектора опишет кривую, называемую *годографом Михайлова*. Она начинается на положительной полуоси, так как  $D(0) = a_n$ , и последовательно проходит против часовой стрелки  $n$  квадрантов комплексной плоскости, уходит в бесконечность в  $n$ -м квадранте (рис. 8а).

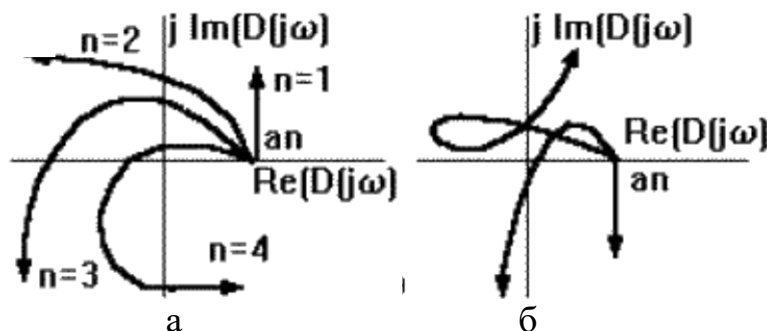


Рис. 8. Годографы Михайлова для различных систем

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно  $n$ , или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис.8б), то такая САУ неустойчива, это и есть *необходимое и достаточное условие критерия Михайлова*.

*Достоинства.* Этот критерий удобен своей наглядностью. Так, если кривая проходит вблизи начала координат, то САУ находится вблизи границы устойчивости и наоборот. Этим критерием удобно пользоваться, если известно уравнение замкнутой САУ.

Для облегчения построения годографа Михайлова выражение  $D(j\omega)$  представляют суммой вещественной и мнимой составляющих:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = \text{Re}D(j\omega) + j\text{Im}D(j\omega),$$

где

$$\begin{aligned}\text{Re}D(j\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots; \\ \text{Im}D(j\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots.\end{aligned}$$

Меняя  $\omega$  от 0 до  $\infty$  по выражению для  $D(j\omega)$  находят координаты точек годографа, которые соединяют плавной линией.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимают под устойчивостью САУ в малом и большом?
2. Какой вид имеет решение уравнения динамики САУ?
3. Как найти вынужденную составляющую решения уравнения динамики САУ?
4. Какой вид имеет свободная составляющая решения уравнения динамики САУ?
5. Что такое характеристическое уравнение?
6. Какой вид имеют корни характеристического уравнения?
7. Чем отличаются правые и левые корни характеристического уравнения?
8. Что такое граница устойчивости?
9. Что такое критерии устойчивости?
10. Сформулируйте необходимое условие устойчивости САУ.
11. Сформулируйте критерий Гурвица.
12. В чем достоинства и недостатки алгебраических критериев устойчивости?
13. Что называется частотными критериями устойчивости САУ?
14. В чем преимущество частотных критериев устойчивости перед алгебраическими?
15. Сформулируйте принцип аргумента.
16. Сформулируйте критерий устойчивости Михайлова.
17. Поясните каждый из годографов на рис. 8. Как вы судите об устойчивости соответствующих САУ?
18. Какой из годографов на рис. 8 соответствует САУ, находящейся на границе устойчивости?

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить задание у преподавателя.
2. Ознакомиться с руководством по выполнению практической работы.
3. Изучить материалы методических указаний и литературы.
4. Подготовить отчет.

## ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

Отчет представляется каждым студентом в письменном виде и должен содержать следующие пункты:

- 1) название работы;
- 2) цель работы;
- 3) исходные данные для расчетов и условия задач;
- 4) вывод по результатам работы.

На титульном листе отчета должны быть указаны номер группы и фамилия студента, представившего отчет.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров К. В. Основы теории автоматического регулирования / К. В. Егоров. – М.: Энергия. 1967. – 698 с.
2. Солодовников В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
3. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем / Н.Н. Иващенко. – М.: Машиностроение, 1973. – 606 с.
4. Сборник задач по теории автоматического регулирования / под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1969. – 588 с.
5. Васильев Д. В. Системы автоматического управления. Примеры расчета / Д. В. Васильев, В. Г. Чуич. – М.: Высшая школа, 1967. – 419 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЮ ГУРВИЦА.  
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЮ МИХАЙЛОВА

Методические указания  
к выполнению практических работ

Составил ТИХОНОВ Денис Александрович

Рецензент М. В. Стекольников